

# МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОКРЫТИЯ

## (Часть 2)

О.Н. Паулин

Одесский национальный политехнический университет,  
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: paolenic@yandex.ua

В статье продолжается анализ методов и алгоритмов решения задачи о покрытии на предмет выделения макроопераций (МО), как моделей вычислительного процесса нахождения покрытия. Рассматриваются методы и алгоритмы с использованием предварительного сокращения таблицы покрытия (ТП). Такое сокращение возможно, если ТП обладает определёнными свойствами, а именно: наличие особенной «1» в строке, наличие нулевой строки, возможность поглощения строки/столбца. Приводятся словесные описания алгоритмов, их схемы, а также описания и схемы вычислительных модулей (частных процедур). Выделяются МО как вычислительные модели, которые частично обобщаются.

**Ключевые слова:** методы и алгоритмы покрытия, вычислительный процесс, макрооперация, вычислительная модель, особенная единица, нулевая строка, поглощение строки/столбца.

### Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой рассмотрены 2 варианта перебора элементов последовательности: полный перебор и перебор по вогнутому множеству. Результат работы представленного ниже алгоритма – список выявленных ядерных строк и циклический остаток, который может быть обработан методом граничного перебора.

Идея рассмотренных ниже метода и алгоритма заключается в предварительном сокращении таблицы покрытия (ТП) на основе её свойств [2], выраженных соответствующими теоремами, выстроенных в определённом порядке. ТП может обладать (не обладать) следующими свойствами: наличие особенной «1» в строке, наличие нулевой строки, возможность поглощения строки/столбца.

*Цель работы* – сокращение времени анализа программ за счёт выделения макроопераций (МО) из вычислительного процесса обработки ТП.

Задача выделения МО решается аналогично [3].

### Основная часть

*Описание метода и алгоритма обработки ТП на основе её свойств.* ТП может обладать (не обладать) следующими свойствами: строка – ядерная или антиядерная, столбец – поглощающий, строка – поглощаемая.

Метод состоит в последовательном рассмотрении перечисленных свойств и, при их наличии, – в сокращении ТП за счёт удаления определённых строк и/или столбцов. Эти свойства определяются соответствующими теоремами, представленными ниже.

*Структуры данных:*

$M$  – матрица принадлежности или таблица покрытия,  $M[i, j]$  – её элемент;

$P$  – общий признак наличия изменений в ТП,  $P = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$ ;

$p_i$  – частный признак наличия изменений в ТП для подпроцесса,  $i=1..4$ ;

$L$  – список ядерных строк.

Словесное описание алгоритма (СОА), реализующего данный метод:

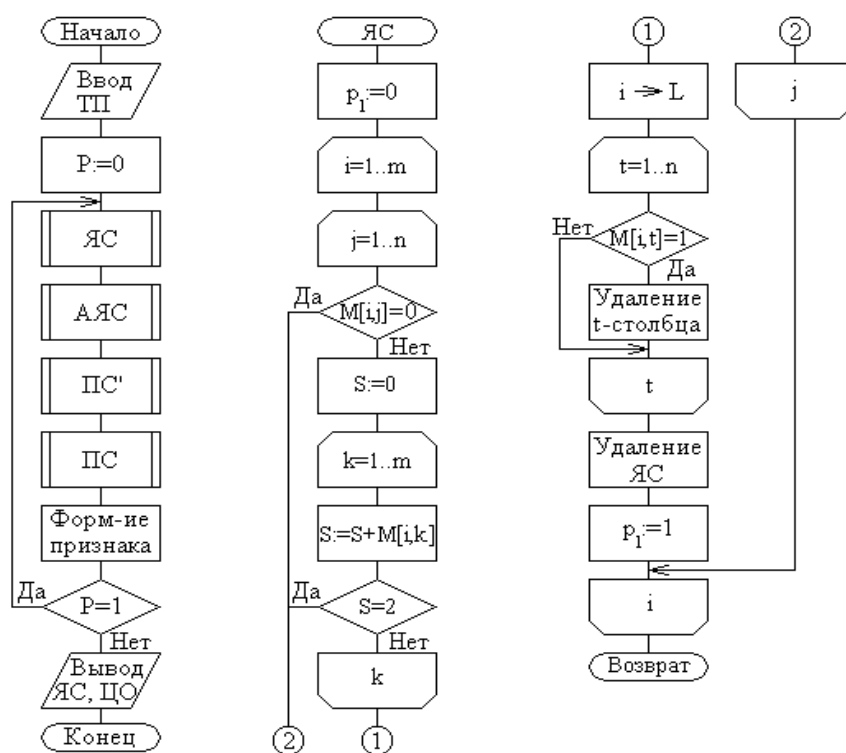
1. Общая процедура состоит в строгой последовательности применения теорем (1-я, 2-я, 3-я, 4-я и снова 1-я, 2-я, и т.д.).

2. Результат процедуры для каждой теоремы – удаление строк или/и столбцов ТП. Но возможны случаи неприменимости теорем.

3. Процедура для каждой теоремы заканчивается определением значения признака  $p_i$  ( $p_i = 1$  в случае наличия изменений в ТП).

4. Формируется общий признак  $P$  наличия изменений в ТП ( $P = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$ ). Если в результате прохода вычислительного процесса по всем частным процедурам ТП не изменилась ( $P = 0$ ), то вычислительный процесс закончен. Иначе общая процедура повторяется.

На рис. 1(а) приведена общая схема алгоритма (СА), построенная по СОА.



а

б

Рис. 1. СА: а – общей процедуры сокращения ТП ; б – нахождения ядерной строки

Рассмотрим частные процедуры (подпроцессы вычислений).

Сокращение ТП на основе теоремы о ядерной строке.

**Теорема 1.** Если в столбце ТП содержится единственная единица, то строка, содержащая эту единицу, входит во все покрытия и называется ядерной. Ядерная строка (ЯС) вычёркивается из ТП с запоминанием, вычёркиваются также все столбцы, покрываемые единицами ЯС [4].

Назовём единицу строки ТП особенной, если она в своём столбце является единственной – без неё покрытие принципиально невозможно.

Словесное описание процедуры нахождения ЯС:

1. Признаку  $p_1$  присваивается значение 0.
2. Перебираются строки ТП в цикле по  $i, i=1..m$

3. В текущей строке перебираются её элементы. Если  $M[i, j]=0$ , то переход на п.3.
  4. Для очередной «1» строки просматривается весь столбец ТП, содержащий эту «1» ( $k=1..m$ ). При этом нулевые элементы игнорируются, а единичные суммируются ( $k=1..m$ ). Если  $S=2$ , то переход на п. 3.
  5. Если она особенная ( $S=1$ ), то текущая строка является ядерной; её номер заносится в список ЯС.
  6. Удаляются покрывающие столбцы ЯС ( $t=1..m$ ), при  $M[i, t]=1$ .
  7. Удаляются ЯС. Признаку  $p_1$  присваивается значение 1.
  8. Если перебраны все строки, то возврат в основную программу.
- На рис. 1(б) приведена СА нахождения ЯС.

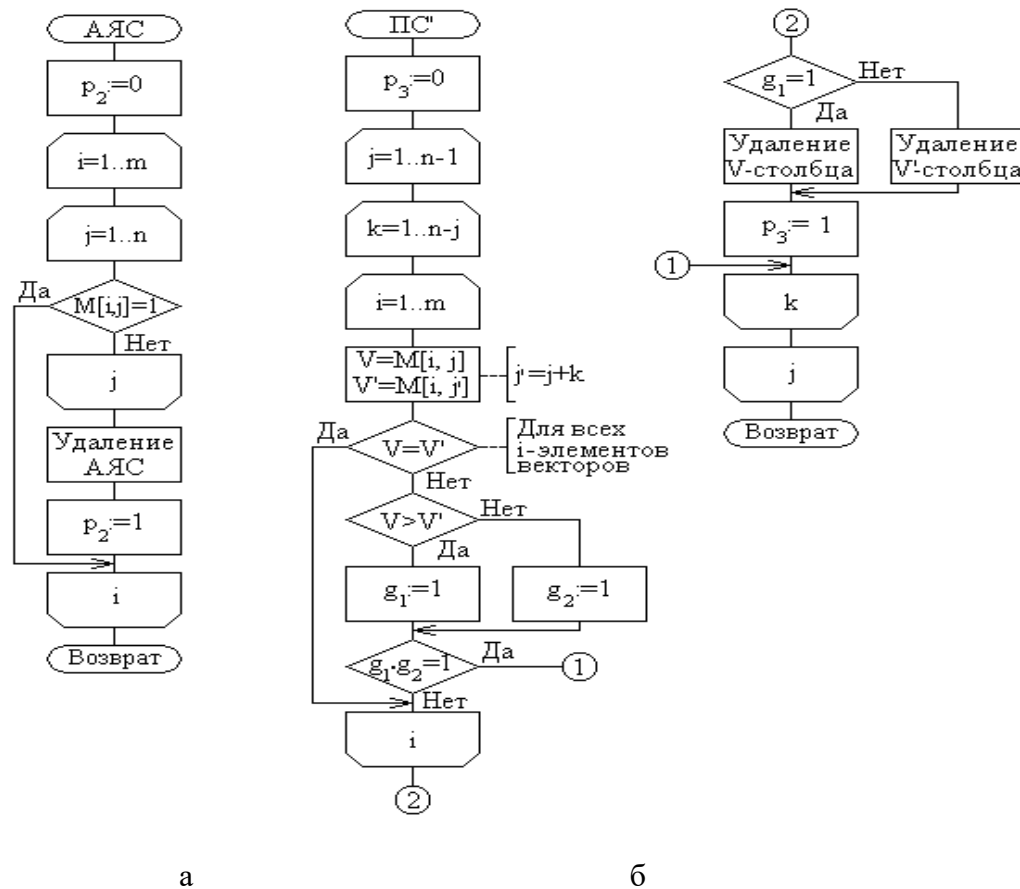
*Сокращение ТП на основе теоремы об антиядерной строке.*

**Теорема 2.** (об антиядерной строке). Антиядерной называется строка, содержащая нулевые элементы. Эту строку можно удалить из ТП без запоминания [4].

*Словесное описание процедуры нахождения антиядерной строки (АЯС):*

1. Признак  $p_2$  принимает значение 0.
2. Перебираются строки ТП. Если перебраны все строки, то переход на п. 5.
3. Просматриваются элементы текущей строки ( $j=1..n$ ). При этом возможны два варианта: досрочный выход из цикла при  $M[i, j]=1$  с переходом на п. 2 либо полный перебор при всех  $M[i, j]=0$ , т.е. получается антиядерная строка.
4. АЯС удаляется из ТП;  $p_2 := 1$ . Переход на п. 2.
5. Возврат.

На рис. 2(а) представлена СА частной процедуры «Нахождение АЯС»



**Рис.2.** СА: а – нахождения антиядерной строки; б – нахождения поглощающего столбца

Прежде чем перейти к рассмотрению третьей и четвёртой теорем, познакомимся с понятием «поглощение».

**Определение 1.** Вектор  $E = (e_1, \dots, e_m)$  поглощает вектор  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $E \geq F$ , если для всех компонент  $e_i, f_i$  этих векторов можно одновременно записать  $e_i \geq f_i$ . В противном случае векторы называются *несравнимыми*.

**Пример 1.** Пусть заданы два вектора  $E=(1,1,0,1)$ ,  $F=(0,1,0,1)$ . Сравнивая их поэлементно (например, слева направо), заключаем, что  $E \geq F$ .

**Пример 2.** Пусть заданы два вектора  $E=(1,1,0,1)$ ,  $F=(0,1,1,1)$ .

Возможны 4 варианта результата сравнения элементов пары векторов  $(V, V')$ ; для отражения этих вариантов предлагается использовать 2 признака:  $g_1$  и  $g_2$  (табл. 1).

**Таблица 1.**

Признаки результата сравнения элементов векторов

Отношения элементов векторов	$g_1$	$g_2$
$V[i] = V'[i]$	0	0
$V[i] < V'[i]$	0	1
$V[i] > V'[i]$	1	0
Вектора несравнимы	1	1

*Сокращение ТП на основе теоремы о поглощающих столбцах.*

**Теорема 3.** В ТП могут быть вычеркнуты все поглощающие столбцы (рассматриваемые как двоичные векторы) без ущерба для построения всех безызбыточных покрытий [4].

*СОА «Нахождение поглощающего столбца»:*

1. Признак  $p_3$  принимает значение 0;  $g_1 = 0; g_2 = 0$ .

2. Формируем пары столбцов. Для этого:

2.1. Фиксируется  $j$ -й столбец в качестве первого компонента пары,  $j=1, \dots, n-1$ .

2.2. Перебираются остальные столбцы в качестве второго компонента пары с номером  $j', j'=j+k, k=1, \dots, n-j$ .

3. Представляем столбцы пары в виде двоичных векторов  $(V, V')$  с номерами  $j$  и  $j'$  соответственно.

4. В цикле по  $i, i=1, \dots, m$ , сравниваем элементы пары векторов.

Если  $V[i] = V'[i]$ , то переход на п.4.

Если  $V[i] < V'[i]$ , то  $g_1 = 1$ , иначе  $g_2 = 1$ .

Если  $g_1 \& g_2 = 1$ , то переход на п. 2.2.

5. По окончании поэлементного сравнения проверяем  $g_1 = 1$ ? Если – да, то удаляем столбец с номером  $j$ , иначе удаляем столбец с номером  $j'$   $p_3 = 1$ . Переходим на п. 3.

6. Если просмотрены все пары, то возврат в основную программу.

На рис. 2(б) приведена СА нахождения поглощающего столбца.

**Теорема 4.** (о поглощаемых строках при поиске одного кратчайшего покрытия). Если при решении задачи о покрытии достаточно гарантировать получение хотя бы одного кратчайшего покрытия, то можно удалить все поглощаемые строки [4].

*СОА «Нахождение поглощаемой строки»:*

1.  $p_4 := 0, g_1 := 0, g_2 := 0$ .

2. Формируются пары строк. Для этого:

2.1. Фиксируется  $i$ -я строка в качестве первого компонента пары,  $i=1, \dots, m-1$ .

2.2. Перебираются остальные строки в качестве второго компонента пары с номером  $i'$ ,  $i'=i+k$ ,  $k=1, \dots, m-i$ .

3. Представляем строки пары в виде двоичных векторов  $(V, V')$  с номерами  $i$  и  $i'$  соответственно.

4. В цикле по  $j, j=1, \dots, n$ , сравниваем элементы пары векторов.

Если  $V[i] = V'[i]$ , то переход на п.4.

Если  $V[i] \neq V'[i]$ , то  $g_1 = 1$ , иначе  $g_2 = 1$ .

Если  $g_1 \& g_2 = 1$ , то переход на п. 2.2.

5. По окончании поэлементного сравнения проверяем  $g_1 = 1$ ? Если – да, то удаляем строку с номером  $i'$ , иначе удаляем строку с номером  $i$   $p_4 = 1$ . Переходим на п. 2.2.

6. Если просмотрены все пары, то возврат в основную программу.

СА нахождения поглощаемой строки не приводится, поскольку она в значительной степени повторяет рис. 4 с той разницей, что параметры  $i$  и  $j$  следует поменять местами. Кроме того, в случае проверки  $g_1 = 1$ ? надо поменять местами вектора  $V$  и  $V'$  с номерами  $i$  и  $i'$  соответственно.

Разновидностью теоремы 4 является теорема 5.

**Теорема 5.** (о поглощающих строках при построении минимальных покрытий). Если при решении задачи о покрытии достаточно гарантировать построение всех (хотя бы одного) минимального покрытия, то можно вычеркивать поглощаемую строку, если цена её больше или равна цене поглощающей строки [4].

В этом случае п. 5 должен включать в себя проверку по цене строк.

Используя теоремы 1-4, упрощаем ТП. При этом возможны два исхода.

1. ТП после упрощения становится пустой (вычеркнуты все столбцы). В этом случае множество ядерных строк – требуемое покрытие.

2. Остаток ТП более не упрощается приёмами из теорем 1-4. Получаем циклический остаток (ЦО) таблицы покрытий. Покрытие ЦО таблицы можно строить методами граничного перебора либо разложения по столбцу.

Полное решение (покрытие исходной таблицы) состоит из ядерных строк и строк покрытия ЦО.

*Общий список МО.* Поскольку данный метод основан на методе полного перебора, то все его МО [1] сохраняются и в этом случае. Однако здесь появляются новые МО, связанные с новыми подпроцессами на основе свойств ТП и определением понятия «поглощения».

Общая процедура может быть представлена как МО высшего уровня, включающая в себя частные процедуры, которые могут быть представлены МО более низкого уровня: «Ядерная строка», «Антиядерная строка», «Поглощающие столбцы», «Поглощаемая строка», а также элементарные МО: «Формирование признака (логической формулы) окончания/прерывания вычислительного процесса» и «Альтернатива»

В свою очередь, МО для частных процедур также могут быть представлены через МО более низкого уровня: «Счётный цикл», «Условный цикл», «Поиск особенной «1» в строке», «Занесение номера ЯС в список», «Удаление строки (с двумя вариантами: ядерная и поглощаемая)», «Удаление столбца (с двумя вариантами: покрывающий и поглощающий)», «Присвоение переменной (признаку, флагу) определённого значения», «Поиск нулевой строки», «Представление строки/столбца двоичным вектором», «Сравнение элементов пары векторов», «Суммирование элементов строки/столбца и векторов», «Формирование циклического остатка».

## Выводы

Рассмотрены методы и алгоритмы решения задачи о покрытии для случая предварительного сокращения таблицы покрытия с использованием её особенностей (свойств), сформулированных в виде теорем. Выделены макрооперации для каждого подпроцесса вычислений, которые собраны в единый список с частичным обобщением.

## Список литературы

1. Паулин, О.Н. Вычислительные модели алгоритмов покрытия / О.Н. Паулин. // Информатика та математичні методи в моделюванні. — Одеса, ОНПУ. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 385–396.
2. Кнут, Д. Искусство программирования. Т.3. – Сортировка и поиск / Д. Кнут. — М.: Изд. Дом «Вильямс», 2000. — 832 с.
3. Паулин, О.Н. О выделении макроопераций из вычислительных процессов сортировки массивов данных [Текст] / О.Н. Паулин, Н.О. Комлева, С.Ю. Марулин. // Проблемы програмування. — 2016. — № 2-3. — С. 87–95.
4. Новоселов, В.Г. Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах: учебное пособие / В.Г. Новоселов, А.В. Скاتков. — К.: УМК ВО, 1992. — 200 с.

## МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ПОКРИТТЯ (Частина 2)

О.М. Паулін

Одеський національний політехнічний університет,  
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: paolenic@yandex.ua

У статті продовжується аналіз методів і алгоритмів вирішення задачі про покриття на предмет виділення макрооперацій (МО), як моделей обчислювального процесу знаходження покриття. Розглядаються методи та алгоритми з використанням попереднього скорочення таблиці покриття (ТП). Таке скорочення можливо, якщо ТП володіє певними властивостями, а саме: наявність особливої «1» в рядку, наявність нульового рядка, можливість поглинання рядка/стовпчика. Наводяться словесні описи алгоритмів, їх схеми, а також опис і схеми обчислювальних модулів (окремих процедур). Виділяються МО як обчислювальні моделі, які частково узагальнюються.

**Ключові слова:** методи і алгоритми покриття, обчислювальний процес, макрооперація, обчислювальна модель, особлива одиниця, нульовий рядок, поглинання рядка/стовпчик

## COVERING METHODS AND ALGORITHMS (Part 2)

O.N. Paulin

Odesa National Polytechnic University,  
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: paolenic@yandex.ua

The analysis of methods and algorithms for solving the covering problem for the purpose identification of macrooperations (MO) finding as models of the computational process of finding the cover continues in the article. Methods and algorithms are considered using preliminary reduction of the coverage table (CT). Such a reduction is possible if the CT has certain properties, namely: the presence of a special "1" in the line, the presence of a null string, the possibility of absorbing a row/column. The verbal descriptions of algorithms, their schemes, as well as descriptions and schemes of computational modules (private procedures) are given. The MO are identified as computational models, which are partially generalized.

**Keywords:** methods and algorithms of coverage, computational process, macrooperation, computational model, singular unit, zero row, row/column absorption